



TITLE:

完全交叉環におけるZariski-Lipmanの予想について
(Buchsbaum環とgeneralized Cohen-Macaulay環の研究)

AUTHOR(S):

吉野, 雄二

CITATION:

吉野, 雄二. 完全交叉環におけるZariski-Lipmanの予想について (Buchsbaum環とgeneralized Cohen-Macaulay環の研究). 数理解析研究所講究録 1982, 465: 67-79

ISSUE DATE:

1982-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103174>

RIGHT:

完全交叉環における Zariski-

Lipman の予想について

名大(理) 吉野 雄二

Lipman は, その論文 [L] の中で次の様な問題を考え始めた。

- (*) A が標数 0 の体 k 上の *locality* のとき, $\text{Der}_k(A)$ が, A 上 *free* ならば, A は *regular* か?

いわゆる, Zariski-Lipman 予想である。

これに関して, 次の場合にはすでに肯定的に知られている。

- (1) 1 次元の場合 (Lipman [L])
- (2) *hypersurface* の場合 (Scheja-Storch [SS-1])
- (3) *graded case* (Hochster [H-2])

ここでは, 次に調べるべきは, 完全交叉な (以下 C-I と略す。) 局所環であるという信念に基づき考察を進めたい。

Hochster が [H-1] の中で, *graded* C-I の場合の Z-L 予想を証明できた根拠は, 次の二つの事実にあるように思われる。

- (1) 0次元 C-I の socle は, Jacobian を使って書くことができること。
- (2) Euler derivation が存在すること。

本稿では, §1 でこの主張(1)が局所環の場合にも成立することを示す。更に, §2 では, Euler derivation の存在を仮定せずに話がどこまで進むかについて考える。

但し, Z-L 予想を考える上で, 局所環は完備化しても, かまわないということを注意しておこう。したがって, 以下では, もっぱら, 完備な局所環に話を限って論ずることにする。

§ 1.

この節の目標は, 次の定理を示すことにある。

定理 1. k を標数 0 の体, $B = k[[x_1, \dots, x_n]]/(f_1, \dots, f_n)$ が, 0次元の C-I のとき, B の socle は, $J = \det(\partial f_i / \partial x_j)$ で生成される。

これを, 証明するためには, 多少の準備が要る。

命題 1. k を標数 0 の体, B を k 上 finite な local ring とする。このとき, トレース $S_p := S_p^B_k$ が, $\text{Hom}_k(B, k)$ の socle を生成する。

(証) $\text{Hom}_k(B, k)$ の socle は, k 上 1 次元であることに注意する。そこで, $S_p \neq 0$ から $\mathcal{M}_B \cdot S_p = 0$ をいえる。

$S_p \neq 0$ は, 標数が 0 より明らか。 $\mathcal{M}_B \cdot S_p = 0$ をいうためには, $\forall x \in \mathcal{M}_B$ と $\forall y \in B$ について, $x \cdot S_p(y) = S_p(xy) = 0$ をいえる。即ち, $S_p(\mathcal{M}_B) = 0$ をいえるのであるが, これは \mathcal{M}_B の元が巾零であることから導かれる。■

以下 A を Noether 環, B を A 上の finite projective algebra とする。この時, 同型 $\varphi: \text{Hom}_A(B, B) \rightarrow B^* \otimes_A B$ があることは, よく知られている。但し, $B^* = \text{Hom}_A(B, A)$ 。また, $x \in B$ に対して, $S_p(x) \in A$ は次の様に定義される。

$\mu_x \in \text{Hom}_A(B, B)$ を x による homothety, すなわち,

$$\varphi(\mu_x) = \sum_i b_i^* \otimes b_i \quad (b_i^* \in B^*, b_i \in B)$$

とあるとき, $S_p(x) := \sum_i b_i^*(b_i)$ 。

$S_p \in \text{Hom}_A(B, A)$ である。

注意 次は同値である。

(1) $\text{Hom}_A(B, A) = B \cdot S_p$.

(2) B は A 上 unramified (ie $\Omega_{B/A} = 0$)

(証) A の各点での fiber で考えてよいから, 始めから A は, 体としてよい。しかし, この時には, よく知られている。■

定義 (Scheja-Storch の三角, cf. [SS-2])

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{\mu} & B \\ \downarrow \kappa & \nearrow \nu & \\ \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(B, A), B) & & \end{array}$$

を次のように定義する。

$$\begin{cases} \mu(\sum b \otimes b') := \sum bb' \\ \kappa(\sum b \otimes b')(\phi) := \sum \phi(b) b' \quad (\phi \in \text{Hom}_A(B, A)) \\ \nu(\psi) := \psi(s_p) \end{cases}$$

補題 1. (1) κ は同型である。

(2) $B^e = B \otimes_A B$, $I = \text{Ker } \mu$, $\mathcal{O} = \text{Ann}_{B^e} I \subset B^e$ とおくとき, 同型射 κ によって, \mathcal{O} は, $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(B, A), B)$ の submodule $\text{Hom}_B(\text{Hom}_A(B, A), B)$ と同型である。

(証) (1) は well known.

(2) $x = \sum b_i \otimes b'_i \in B^e$ をとる,

$$\kappa(x) \in \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(B, A), B)$$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B \text{ と } \forall \phi \in \text{Hom}_A(B, A) \text{ をとる,}$$

$$\sum \phi(b b_i) b'_i = \sum \phi(b_i) b b'_i$$

$$\Leftrightarrow \kappa((b \otimes 1)x) = \kappa((1 \otimes b)x) \quad (\forall b \in B)$$

$$\Leftrightarrow x(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = 0 \quad (\forall b \in B) \Leftrightarrow x \in \mathcal{O}. \quad \blacksquare$$

補題 2. Scheja-Storch の三角は, \mathcal{O} に制限すると

可換である。即ち,

$$\begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\mu} & B \\ \kappa \downarrow \supset & \searrow \nu & \\ \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(B, A), B) & & \end{array}$$

(証明は, 計算だけなので省略する。)

さて, $B = A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n)$ が relatively C-I (ie, B は A 上 finite projective で, $\{f_1, \dots, f_n\}$ が regular sequence.) とする。この時,

$$f_i \otimes 1 - 1 \otimes f_i = \sum a_{ij} (x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j)$$

$$(a_{ij} \in A[x] \hat{\otimes}_A A[x])$$

$$\Delta := \det(a_{ij}) \in B^e$$

$$\text{とおくと, } \Delta \in \sigma \text{ かつ, } \mu(\Delta) = J \left(:= \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right)$$

となる。したがって, 補題 2. より次を得る。

系. 上の状況のもとで, $J = \kappa(\Delta) \cdot (S_p)$

更に, 次のことが成立する。

命題 2. B が A 上 relatively C-I とする。このとき,

$\text{Hom}_A(B, A)$ は rank 1 の B -free module なるので, その生成元を ζ とする。すると,

$$S_p = u \cdot J \cdot \zeta$$

(但し, J は上記の如く, $J = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$) が成り立つ。
 u は B の unit である。

(証) 上の記号をそのまま使う。先ず, $\alpha = \Delta \cdot B^e$ とする
 ことを示そう。これは, ring $C := B \hat{\otimes}_A A[[x]]$ の中で,
 ideal $(1 \otimes f_1, \dots, 1 \otimes f_n, \Delta)C$ と $(1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n)C$
 は, $(1 \otimes f_1, \dots, 1 \otimes f_n)C$ 上 algebraic に link
 していることから従う。さて, $\alpha = \Delta \cdot B^e$ と補題 1.(2)
 より, $u' := \kappa(\Delta)(\gamma)$ は B の unit である。一方, 上の
 系において, $Sp = c\gamma$ ($c \in B$) とすると,

$$J = \kappa(\Delta)(Sp) = \kappa(\Delta)(c\gamma) = cu'$$

 これより 命題を得る。■

命題 1. と 2. から定理 1. は容易に従う。実際, 命題
 より, 同型 $B \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(B, k)$ によって, J は,
 (unit を除けば) Sp に対応する。ところで, 命題 1. より,
 Sp は $\text{Hom}_k(B, k)$ の socle の生成元故, J は B の
 socle の生成元となる。

§ 2.

この節では, もし次の予想が正しいければ, 一般の C-I
 local ring における Z-L 予想も正しいことを示そう。

予想 (**) k を標数 0 の体, $A = k[[x_1, \dots, x_n]] / (f_1, \dots, f_{n-2})$
 を 2 次元 の C-I local ring で, A はその subring C

と C 上 analytic independent な元 z によって, $A \cong C[[z]]$ となることは, 決まていないとする。このとき, $\text{Der}_k(A)$ の極小生成元の1つである derivation D で, A の parameter ideal を stable とするものが存在する?

たぶん "homogeneous ならば", D として Euler derivation をとればよいことは, すぐ分る。

さて, 上の予想(**) が Z -L 予想を導くことを示すために, いくつか必要な準備をしておこう。

$k \rightarrow A$ を一般に ring homomorphism とする。 A -module M に対して,

$$\mathcal{D}_k^A(M) := \left\{ f \in \text{Hom}_k(A, M) \mid f(abc) + abf(c) = bf(ac) + af(bc), \forall a, b, c \in A \right\}$$

とおく。

$\text{Hom}_k(A, M)$ には, 両側から A が作用する, 即ち,

$A^e := A \otimes_k A$ - 加群であることに注意しよう。このとき,

補題 1. (1) $\mathcal{D}_k^A(M)$ は $\text{Hom}_k(A, M)$ の A^e -sub-module である。

(2) $M \rightarrow \text{Hom}_k(A, M)$ によって, M は $\text{Hom}_k(A, M)$ への A -module 同型 $m \mapsto (a \mapsto am)$ となる。

の A^e -submodule である。

(3) $\text{Der}_k(A, M)$ は $\text{Hom}_k(A, M)$ の 左- A submod. である。

$$\text{すなわち, } \mu: A^e \rightarrow A \text{ を } \mu(\sum a_i \otimes b_i) = \sum a_i b_i$$

$I := \text{Ker } \mu$ とおく。次の事柄は殆んど明白である。

補題 2. 左 A -modules とし,

$$\mathcal{D}_k^A(M) \cong M \oplus \text{Der}_k(A, M).$$

補題 3. A^e -modules とし,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_k^A(M) &\cong \text{Hom}_{A^e}(A^e/I^2, \text{Hom}_k(A, M)) \\ &\cong \text{Hom}_A(A^e/I^2, M) \end{aligned}$$

定義 $A_k^\Omega := A^e/I^2 = A \times \Omega A/k$

$\mathcal{D}_k^A(M)$ は, A_k^Ω -module であり, 作用は次のように定義されることに注意しておこう。

$$\begin{cases} a \oplus db \in A_k^\Omega = A \times \Omega A/k \\ m \oplus D \in \mathcal{D}_k^A(M) = M \oplus \text{Der}_k(A, M) \end{cases}$$

$$\text{したがって, } (a \oplus db)(m \oplus D) = \{am + D(b)\} \oplus aD$$

注意. A が k 上 analytic のときには,

$$A^e = A \hat{\otimes}_k A$$

$\Omega A/k$ = the universal finite module of differentials of A over k .

として、上の事は全て成立する。

さて、 $A \cong A_k^\Omega / \Omega_A$ により $\overbrace{A}^{A \text{ は}} A_k^\Omega$ の factor ring とみる：とみる。

補題 4. A の ideal $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O} = \{D(x) \mid D \in \text{Der}_k(A), x \in A\}$ とおくと、 A -module として次の同型がある。

$$\mathcal{D}_k^A(A) \otimes_{A^\Omega} A \cong A/\mathcal{O} \oplus \text{Der}_k(A)$$

以下では、 k を標数 0 の体、 $R = k[[x_1, \dots, x_n]]$
 $A = R/(f_1, \dots, f_r)$; $(n-r)$ 次元の CI とする。

$dx_1, \dots, dx_n \in A_k^\Omega = A \otimes \Omega_{A/k}$ の元と考える。

更に、 $j_i = (\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}) \in A^n \subset (A^\Omega)^n$

とする。また、任意に与えられた derivation D

$\in \text{Der}_k(A)$ に対して、

$$S(D) := A \oplus A \cdot D \subseteq \mathcal{D}_k^A(A)$$

とおく。 $S(D)$ は、 $\mathcal{D}_k^A(A)$ の A_k^Ω -submodule とある。

A_k^Ω -module $S(D)$ の $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ に関する Koszul complex $K_\bullet(dx_1, \dots, dx_n; S(D))$ を考えると $j_i \otimes 1 (\in (A_k^\Omega)^n \otimes_{A^\Omega} S(D))$ 達は、1 次の cycle と与えるから、

$$(j_1 \wedge \dots \wedge j_r) \otimes 1 \in H_r(dx_1, \dots, dx_n; S(D))$$

を考えることが出来る。

補題 5 $D \in \text{Der}_k(A)$ に対して, A の parameter 系

$$\underline{y} = (y_1, \dots, y_{n-r}) \text{ が存在して, } D(\underline{y}) \subseteq \underline{y}A$$

となるならば,

$$(\underline{j}_1 \wedge \dots \wedge \underline{j}_r) \otimes 1 \neq 0 \quad \text{in } H_r(dx_1 \dots dx_n; S(D)).$$

(証) $S = k[\underline{y}_1, \dots, y_{n-r}]$, $\pi = (y_1, \dots, y_{n-r})S$

とおこう。 $S \rightarrow A$ は finite である。 $\tilde{A} = A/\pi A$ と

すると, $\tilde{A}^{\Omega} = \tilde{A} \times \Omega \tilde{A} = \tilde{A} \times (\Omega A / (dy_1 \dots dy_{n-r})A)$

である。 D は仮定より, \tilde{A} 上の derivation を導くから,

$$\tilde{S}(D) := \tilde{A} \oplus \tilde{A} \cdot D \subseteq \Omega_k^{\tilde{A}}(\tilde{A}) \quad \text{を考えることが出来る。}$$

$$\tilde{S}(D) = S(D) \otimes_{A^{\Omega}} \tilde{A}^{\Omega} \quad \text{に注意しよう。}$$

$$\underline{j}_{r+j} := \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \right) \quad (j=1, 2, \dots, n-r)$$

は, $k.(dx_1 \dots dx_n; \tilde{S}(D))$ の 1/r の cycle を与える。

$$\text{すなわち, } \{(\underline{j}_1 \wedge \dots \wedge \underline{j}_r) \otimes 1\} \wedge \{(\underline{j}_{r+1} \wedge \dots \wedge \underline{j}_n) \otimes 1\}$$

$$= \frac{2(f_1 \dots f_r y_{r+1} \dots y_n)}{2(x_1 \dots x_n)} \otimes 1.$$

は, 前節の定理 1 より $\bigwedge (\tilde{A}^{\Omega})^n \otimes_{\tilde{A}^{\Omega}} \tilde{S}(D)$ の元として,

0 でない。 とくに, $H_n(dx_1 \dots dx_n; \tilde{S}(D))$ の元として 0

でない。 これから, $(\underline{j}_1 \wedge \dots \wedge \underline{j}_r) \otimes 1 \neq 0$ in $H_r(dx_1 \dots dx_n; S(D))$

が出る。 ■

系. $D \in \text{Der}_k(A)$ が " A のある parameter ideal を動かさなうならば",

$$j_1 \wedge \cdots \wedge j_r \neq 0 \text{ in } H_r(Dx_1, \dots, Dx_n; A)$$

(証). もし, 0 である, $\exists \sum_{i_1 \dots i_{r+1}} y_{i_1 \dots i_{r+1}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r+1}}$
 $\in K_{r+1}(Dx_1, \dots, Dx_n; A)$ such that

$$j_1 \wedge \cdots \wedge j_r = \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_j y_{i_1 \dots i_r j} Dx_j (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_j)$$

これから,

$$(j_1 \wedge \cdots \wedge j_r) \otimes 1 = \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_j y_{i_1 \dots i_r j} dx_j (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_j) \otimes D$$

は, $K_*(dx_1, \dots, dx_n; S(D))$ の boundary となり, 補題 5. に反する. \blacksquare

補題 6. もし, $\text{Der}_k(A)$ が " A -free ならば", その base である任意の derivation D について,

$$j_1 \wedge \cdots \wedge j_r = 0 \text{ in } H_r(Dx_1, \dots, Dx_n; A)$$

(証) $\text{Der}_k(A) = \bigoplus_{i=1}^{n-r} AD_i \cong A^{n-r}$ ($D_i = D$) とすると,

次の exact sequence がある。

$$0 \rightarrow A^{n-r} \xrightarrow{[D_i x_j]} A^n \xrightarrow{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]} A^r$$

これから 2 結論は, free resolution の structure theorem

[BE] から容易に得られる。■

A を 2 次元と仮定せずに予想 (**) が成立するとすれば, \mathbb{Z} -L 予想 が正しいことは, 補題 5 の系と補題 6 より明らかである。話を 2 次元に限ってよいという理由は 次の事実による。

定理 (Malliavin [M])

A を上記の通りの C-I とする。このとき, A が (R_q) -condition を満たすことと, $\Omega_{A/k}$ が q -torsion module であることは同値である。とくに, $\Omega_{A/k}$ が reflexive A -module であるためには, A が (R_2) -condition を満たすことが必要十分である。

REFERENCES

- [BE] D.Buchsbaum and D.Eisenbud ; Some structure theorems for finite free resolutions, Adv. in Math. 12 (1974) 84-139.
- [L] J.Lipman ; Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math. 87 (1965) 874-898.
- [M] M-P.Malliavin : Condition (a_q) de Samuel et q -torsion, Bull.Soc.Math. France 96 (1968) 193-196.
- [SS-1] G.Scheja and U.Storch ; Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren, Math. Ann. 197 (1972) 137-170.

[SS-2] _____ ; Lokale Verzweigungstheorie, Schriftenreihe
des Math. Inst. der Univ. Freiburg.

[H-1] M.Hochster ; The Zariski-Lipman conjecture for
homogeneous complete intersections, Proc. Amer. Math. Soc.
49 (1975) 261-262.

[H-2] _____ ; The Zariski-Lipman conjecture in the graded
case, J. Algebra 47 (1977) No.2, 411-424.